

MODELADO DE LA ESTRUCTURA

1.--Modelos de masas concentradas

- 1.1. La viga de Timoshenko
- 1.2. El cilindro de sección indeformable.
- 1.3. Modelado de edificios como voladizo equivalente.
- 1.4. Estructuras reticulares

2.--Modelos continuos

- 2.1. La influencia de la inercia de rotación y la deformación tangencial

3.--Discretización consistente de modelos continuos.

- 3.1. El método de Rayleigh-Ritz y la discretización de Kantorovitch.
- 3.2. El método de los elementos finitos (F.E.M.)
- 3.3. El método de los elementos de contorno (B.I.E.M.)

REFERENCIAS

MODELADO DE LA ESTRUCTURA

Alarcón Álvarez, Enrique

1.--MODELOS DE MASAS CONCENTRADAS

El primer método de discretización que se ocurre consiste en la fijación de ciertos puntos en los que se concentran las características inerciales de la estructura.

Puesto que el comportamiento dinámico no viene controlado exclusivamente por la variación de las cargas con el tiempo, sino por la existencia de las fuerzas de inercia, se comprende la importancia de este proceso y el hecho, en primera instancia paradójico, de que una estructura de compleja modelación para cálculo estático pueda tener un modelo dinámico sencillo si el número de grados de libertad "inerciales" es pequeño.

En general las masas se concentran a estima en puntos de importancia - tanto por su peso como por el interés especial que pueda despertar la - evolución de su respuesta. ARYA et al. (1979) ofrecen los siguientes criterios:

- a) puntos de actuación de cargas dinámicas.
- b) puntos en los que se desee conocer la respuesta.
- c) puntos de máxima flecha estática (vg.: extremos de voladizos, centros de vigas, etc.)
- d) nudos de la estructura (vg.: intersección de vigas y columnas)
- e) nodos de discretización en el F.E.M.
- f) c.d.g. de todas las masas cuando se usa un sistema con un sólo grado de libertad.

En los apartados que siguen presentamos algunos de los modelos usados, previo tratamiento de la justificación teórica subyacente en algunos casos.

1.1.-- La viga de TIMOSHENKO

Vamos a establecer las ecuaciones que rigen el comportamiento de una viga en la que, sobre la hipótesis tradicional de NAVIER respecto al giro relativo de las secciones transversales, se supone la posibilidad de deslizamiento relativo entre sus caras (Fig. 1)

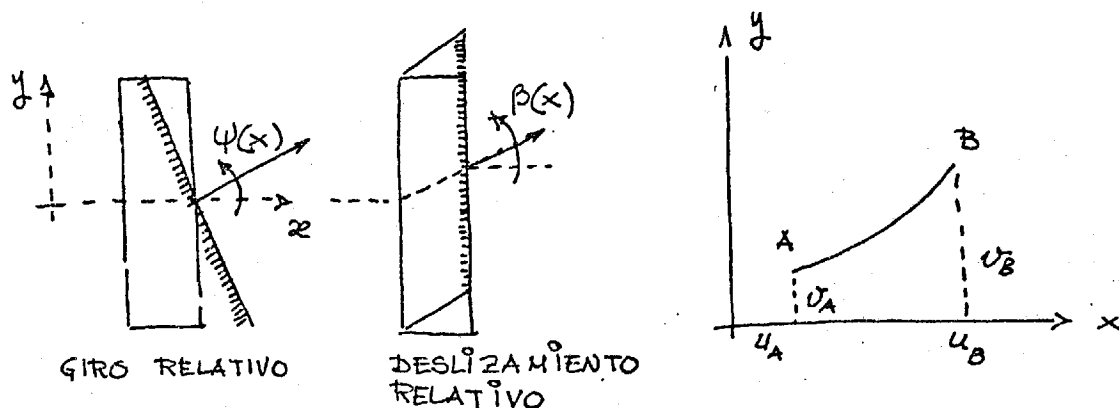


Fig. 1

Ambos tipos de movimientos colaboran en la deformación de la estructura de modo que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi(x) + \beta(x) \quad (1)$$

Por otro lado el corrimiento relativo de un punto de la sección situado a una altura y y respecto a la directriz de la pieza es

$$u = -\psi(x) \cdot y \quad (2)$$

Las deformaciones correspondientes son

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\psi(x) + \psi(x) + \beta(x) = \beta(x) \end{aligned} \quad (3)$$

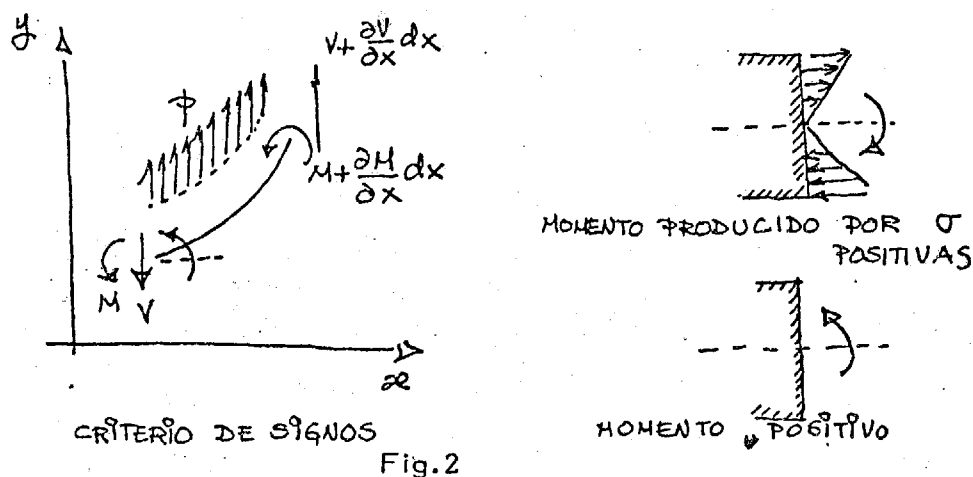
Las tensiones se calculan mediante la ley de Hooke

$$\begin{aligned} \tau_x &= -E y \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= G \beta(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Obsérvese que la última relación (4) implica un valor constante de τ a lo largo de cada sección, lo que es incompatible con un borde libre. En lo que sigue se define una tensión tangencial equivalente mediante un parámetro k para cuyo cálculo existen diferentes teorías. Así pues

$$\tau_{xy} = kG\beta(x) \quad (5)$$

Los esfuerzos se pueden obtener por integración de lo largo de la sección, tras haber fijado un



criterio de signos congruente. Obsérvese (Fig. 2) que éste puede mantenerse con esfuerzos y movimientos pero produce una inconsistencia entre momentos y tensiones "positivas".

Integrando (5) el equilibrio exige

$$V = \int kG\beta(x) da = kG\beta A$$

es decir,

$$\beta = \frac{V}{kGA} \quad (6)$$

que presenta el giro provocado por el esfuerzo cortante.

Para obtener el momento flector, y recordando la advertencia sobre el signo

$$M = - \int \sigma_x y da = E \frac{\partial \psi}{\partial x} \int y^2 da = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{M}{EI} \quad (7)$$

Las relaciones (6) y (7) pueden utilizarse para obtener la ecuación de campo, introduciéndolas en (1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\partial V / \partial x}{kGA} \quad (8)$$

Pero las ecuaciones de equilibrio del elemento diferencial son

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -p \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= -V \end{aligned} \quad (9)$$

Luego

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} - \frac{p}{kGA} \quad (10)$$

Finalmente, derivando dos veces, y utilizando (9)

$$\boxed{\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{p}{EI} - \frac{1}{kAG} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \quad (11)$$

que relaciona directamente las flechas con la carga. Obsérvese, en particular, la coincidencia de (11) con la conocida ecuación de la flexión para vigas de EULER.

En el caso de carga dinámica basta escribir

$$p = q - m \ddot{v} \quad (12)$$

y con ello, tras la oportuna reordenación, se obtiene:

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{mEI}{kAG} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{q}{EI} - \frac{1}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}} \quad (13)$$

1.2.--El cilindro de sección indeformable

En edificios de contención de centrales nucleares una de la estructuras mas usadas es el cilindro vertical de pared delgada.

En este apartado pretendemos establecer la ecuación de campo para el mismo, en el caso particular de que se admita la indeformabilidad de sus secciones transversales.

Veremos, en particular, que con esos hipótesis, el cálculo del cilindro se puede reducir al de una viga de TIMOSHENKO equivalente.

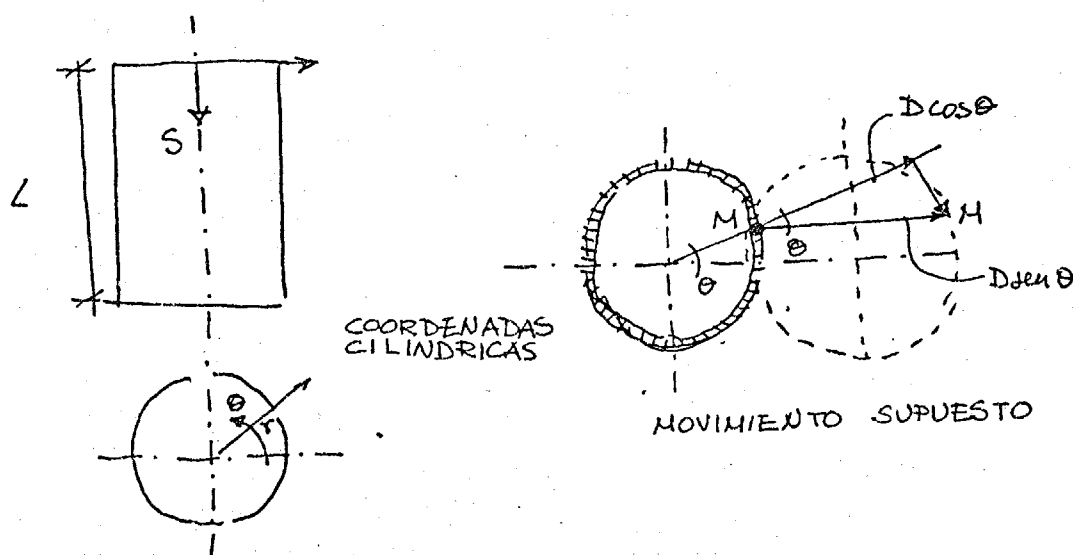


Fig. 3

Supongamos un movimiento como el indicado en la Fig. 3. Si el orden u, v, w corresponde a las coordenadas s, θ, r , los movimientos en un punto M son

$$\begin{aligned} v &= -D \sin \theta \\ w &= D \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

El equilibrio de un elemento de lámina (Fig. 4)

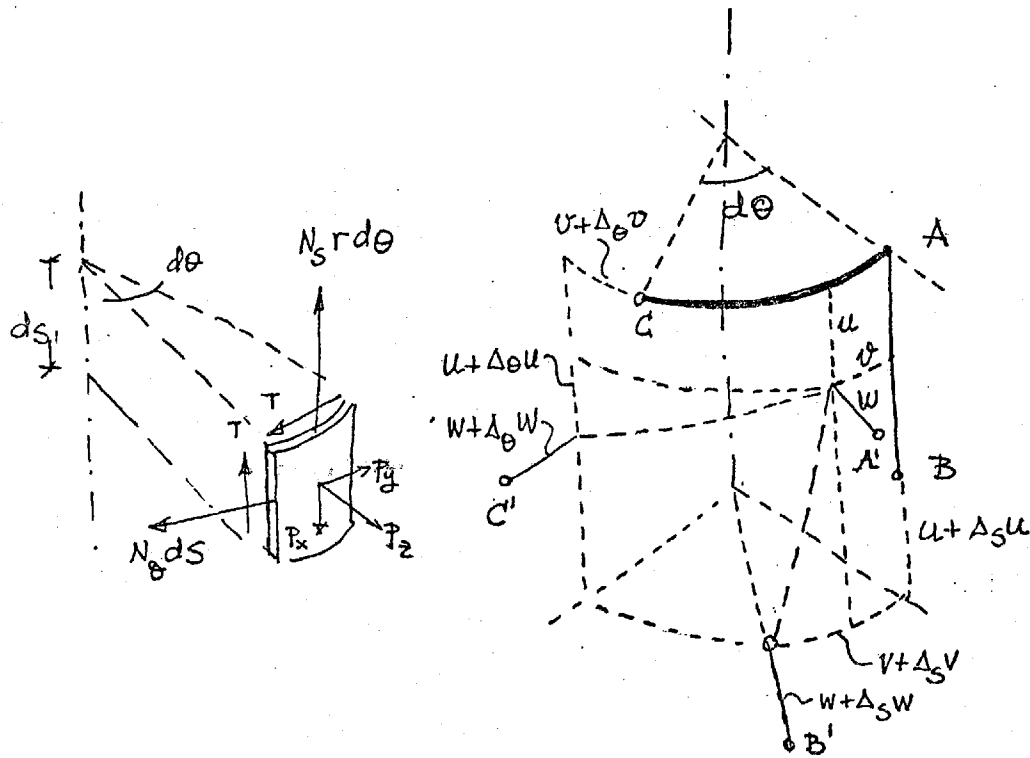


Fig. 4.

es expresado mediante

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + p_x &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + p_y &= 0 \\
 -\frac{N_\theta}{r} + p_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Igualmente, las deformaciones (Fig. 4)

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} \\
 \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\
 \gamma_{s\theta} &= \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

que relacionadas con las tensiones mediante la ley de Hooke

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s &= \frac{1}{E} (\sigma_s - \nu \sigma_\theta) \\
 \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_s) \\
 \gamma_s &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\theta}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

permiten la escritura de la relación de movimientos-esfuerzos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1}{Et} (N_s - \nu N_\theta) \\
 \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{Et} (N_\theta - \nu N_s) \\
 \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{2(1+\nu)}{Et} T
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

siendo t el espesor de la lámina.

• Sustituyendo (14) en la segunda de (18)

$$\underline{N_\theta - \nu N_s = 0}
 \tag{19}$$

La introducción de esta condición en la primera de (18) permite obtener

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1-\nu^2}{Et} N_s}
 \tag{20}$$

Para hacer aparecer esta cantidad en la tercera de (18) basta derivar - respecto a S , obteniendo

$$\frac{\partial^2 D}{ds^2} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{1-\nu^2}{Et} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} = \frac{2(1+\nu)}{Et} \frac{\partial T}{\partial s}$$

(21)

La ecuación (21) junto con las (15) permitirá escribir la ecuación de -- campo.

De la última (15)

$$N_{\theta} = p_z r \quad (22)$$

y por tanto, de la segunda (15)

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -p_y - \frac{\partial p_z}{\partial \theta}$$

Supongamos

$$\begin{aligned} p_x &= 0 \\ p_y &= -p_i \sin \theta \\ p_z &= p_i \cos \theta \end{aligned} \quad (23)$$

que corresponde a la distribución de, vg., una fuerza de inercia por unidad de área; p_i . En estas condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 2 p_i \sin \theta \quad (24)$$

que, introducida en (21), produce

$$\left(\frac{d^2 D}{ds^2} - \frac{2(1+\nu)}{Et} 2 p_i \right) \sin \theta = \frac{1}{r} \frac{1-\nu^2}{Et} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} \quad (25)$$

Como la sección se supuso indeformable

$$D = D(s)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} &= -N_s^* (s) \sin \theta \\ N_s &= N_s^* (s) \cos \theta + F_1 (s) \end{aligned}$$

$F_1(s)$ puede calcularse según la condición del contorno superior. Si es
te es libre

$$\begin{aligned} F_1(s) &= N_s^*(\theta) \cos \theta \\ N_s &= N_s^*(s) \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

con $N_s^*(s) = N_s^*(s) - N_s^*(0)$

Asimismo, (24) puede ser integrada, como

$$T = 2p_i s \sin \theta = F_2(\theta) \quad (27)$$

otra expresión de T se obtiene usando la primera de (15) en conjunción con (26)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= - \frac{\partial N_s^*(s)}{\partial s} \cos \theta \\ T &= -r \frac{\partial N_s^*}{\partial s} \sin \theta + F_3(s) \end{aligned} \quad (28)$$

Identificando (28) y (27) se obtiene

$$F_3(s) = 0$$

y por tanto

$$T = T^*(s) \sin \theta \quad (29)$$

=====

donde T^* solo depende de s

El uso de (26) y (29) permite calcular una expresión para el flector y el cortante en una sección dada, en efecto (Fig. 5)

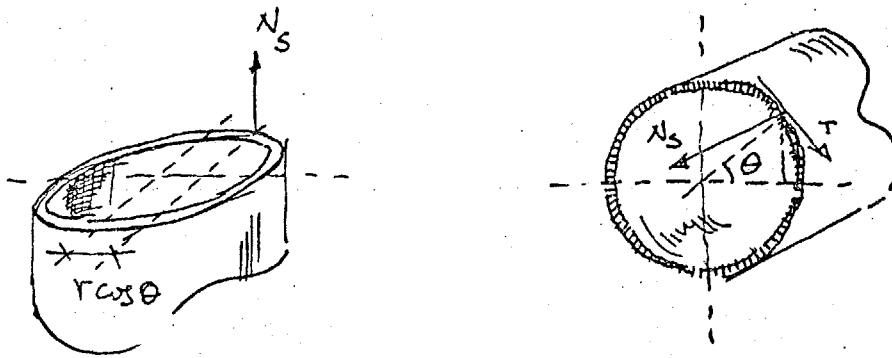


Fig. 5

$$V = - \int_0^{2\pi} T \sin \theta r d\theta = - T^* r \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = - T^* r \pi \quad (30)$$

Observese el signo "-" introducido para hacer la expresión congruente con el sentido positivo en una viga empotrada en la base del cilindro.

Igualmente

$$M = \int_0^{2\pi} (N_s r \cos \theta) r d\theta = N_s^* r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = N_s^* r^2 \pi \quad (31)$$

La carga equivalente sería, de la misma forma

$$p = 2 \pi r p_i \quad (32)$$

De (31) y (32)

$$\begin{aligned} N_s^* &= \frac{M}{\pi r^2} \\ 2p_i &= \frac{p}{\pi r} \end{aligned} \quad (33)$$

que llevadas a (25) junto con (26) permiten escribir, finalmente

$$\frac{d^2 D}{ds^2} - \frac{2(1+\nu)}{Et} \frac{p}{\pi r} = \frac{-1}{r} \frac{1-\nu^2}{Et} \frac{M}{\pi r^2} \quad (34)$$

así pues,

$$\frac{d^2 D}{ds^2} = - \frac{M}{EI} + \frac{p_i}{A_{eq} G} \quad (35)$$

Puede observarse que (35) es exactamente igual que (10) si

- a) se establece el criterio de signos positivos de la viga, con lo que D sería negativo
- b) se define un momento de inercia equivalente igual al de la viga salvo el factor $1-\nu^2$

$$I = \frac{\pi t r^3}{1 - \nu^2} \quad (36)$$

- c) se define el área de cortante como

$$A_{eq} = k A = \pi t r \quad (37)$$

Utilizando esa relación en (22), (26) se obtiene la expresión de los esfuerzos en función de los flectores y cortantes

$$\begin{aligned} N_\theta &= p_i r \cos \theta = \frac{p}{2\pi} \cos \theta \\ N_s &= N_s^* \cos \theta = \frac{M}{\pi r^2} \cos \theta \\ T &= - \frac{V}{r\pi} \sin \theta \end{aligned} \quad (38)$$

Observese que (38) exige una distribución de N_s y T en la secciones extremas con una variación trigonométrica en $\cos \theta$ y $\sin \theta$ respectivamente

1.3.--Modelado de edificios como voladizo equivalente

El apartado anterior demuestra la posibilidad de asimilar los cilindros de los edificios de contención de centrales nucleares a vigas de TIMOSHENKO equivalentes, quedando el problema reducido a la elección de los puntos de concentración de masas (cosa que se realiza de acuerdo con un criterio subjetivo), y al cálculo del coeficiente que define el área equivalente.

Este último punto presenta en sí mismo un problema interesante al que diferentes autores han dados diferentes soluciones.

La mas rigurosa fue presentada por COWPER (1966) que define el coeficiente de TIMOSHENKO en la forma

$$k = \frac{2(1+\nu)I}{\frac{\nu(I_x - I_y)}{2} - \frac{A}{l} \iint x(x + xy^2) dx dy} \quad (39)$$

siendo:

ν : coeficiente de Poisson

I : momento de inercia respecto al eje y (Fig. 6)

I_x : momento de inercia respecto al eje x

y definiendo x como

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -n_x \left(\frac{\nu x^2}{2} + \frac{(2-\nu)y^2}{2} \right) - n_y (2+\nu)xy \quad (40)$$

siendo n la normal al contorno de la sección transversal y n_x , n_y sus cosenos directores respecto a los ejes

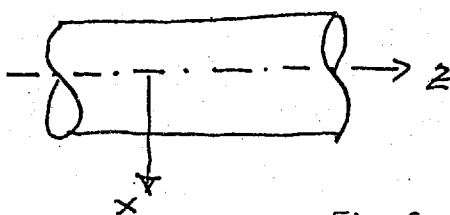
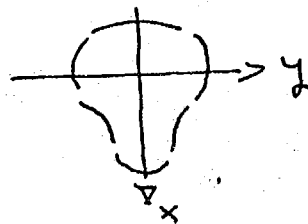


Fig. 6



Por ejemplo, para un tubo de radio interior b y exterior a , LOVE(1952)

obtiene

$$x = - \left(\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} \right) (a^2 + b^2) r + \frac{a^2 b^2}{r} \cos \theta + \frac{r^3}{4} \cos 3 \theta \quad (41)$$

con lo que

$$k = \frac{6 (1+\nu) (1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu) m^2} \quad (42)$$

$$m = b/a$$

Para un cilindro de pared delgada

$$k = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu} \quad (43)$$

Observese que para $\nu=0$ $k=\frac{1}{2}$ en coincidencia con el valor derivado en el apartado anterior. Si se toma $\nu = 0'17$ más de acuerdo con las estructuras de hormigón, se obtendría $k=0'515$ idéntico, a todos los efectos prácticos con la aproximación indicada.

En la Fig.7 recogemos el modelo correspondiente a una central Española, en la que se observa la asimilación, no sólo de la estructura exte-

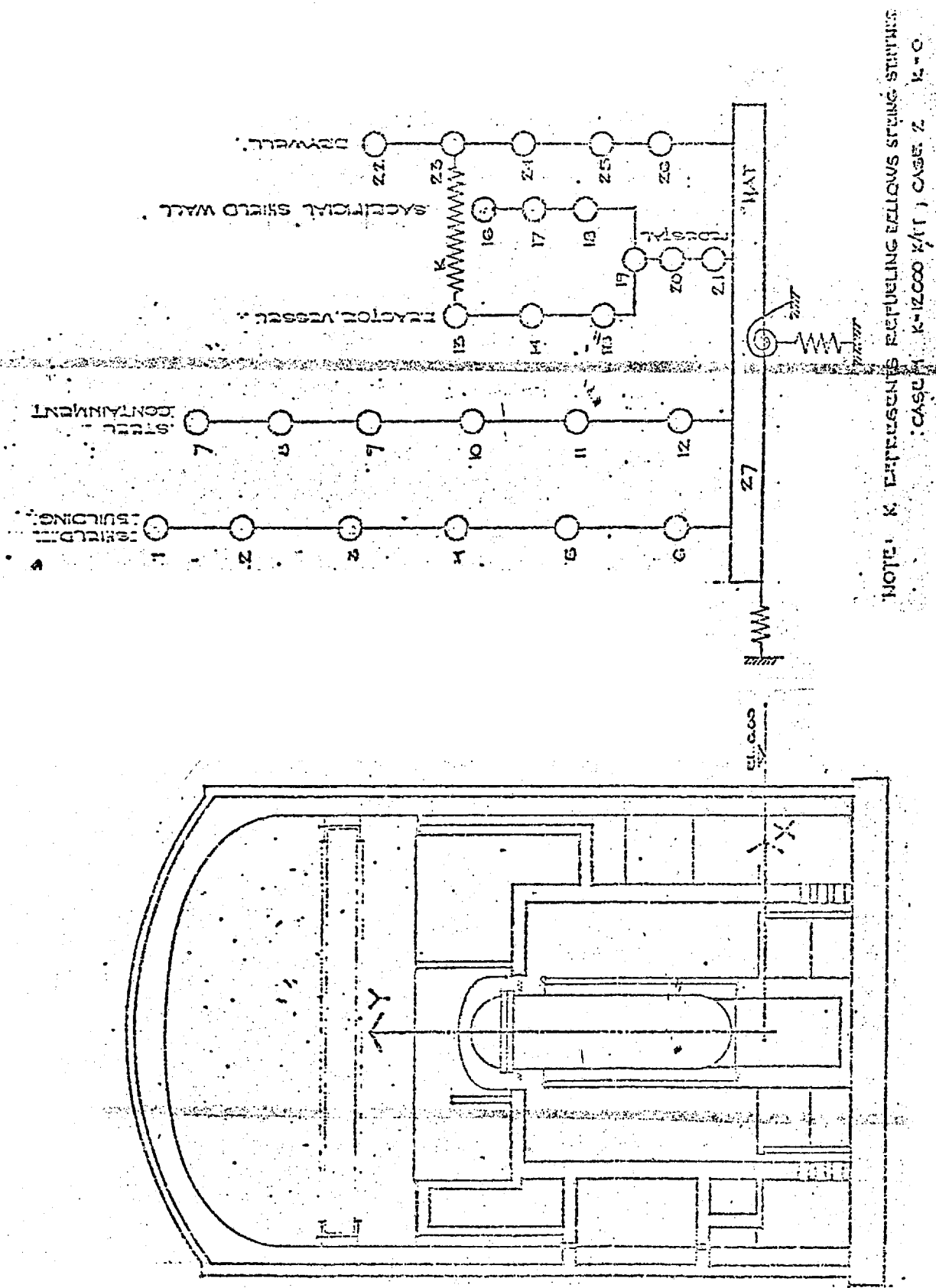


Fig. 7

rior, sino de las interiores. En la Fig. 8 se incluyen los resultados -

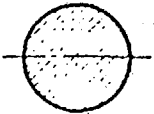
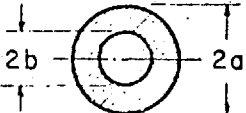

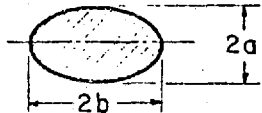

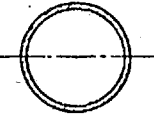
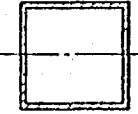
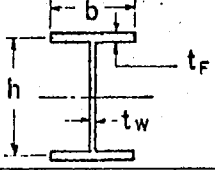
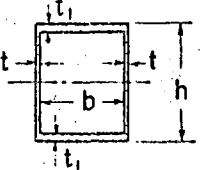
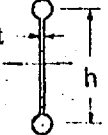
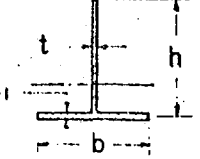
<p><u>CIRCLE</u></p> $K = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$	
<p><u>HOLLOW CIRCLE</u></p> $K = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$ <p>WHERE $m = b/a$</p>	
<p><u>RECTANGLE</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$	
<p><u>ELLIPSE</u></p> $K = \frac{12(1+\nu)a^2(3a^2+b^2)}{(40+37\nu)a^4 + (16+10\nu)a^2b^2 + \nu b^4}$ <p>a MAY BE EITHER > OR < b</p>	
<p><u>SEMICIRCLE</u></p> $K = \frac{1+\nu}{1.305+1.273\nu}$	
<p><u>THIN-WALLED ROUND TUBE</u></p> $K = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$	
<p><u>THIN-WALLED SQUARE TUBE</u></p> $K = \frac{20(1+\nu)}{48+39\nu}$	
<p><u>THIN-WALLED I-SECTION</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3) + 30n^2(m+m^2) + 5\nu n^2(m+9m^2)}$ <p>WHERE $m = 2b t_F / h t_w$, $n = b/h$</p>	
<p><u>THIN-WALLED BOX SECTION</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3) + 10n^2((3+\nu)m+3m^2)}$ <p>WHERE $m = b t_l / h t$, $n = b/h$</p>	
<p><u>SPAR-AND-WEB SECTION</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3)}$ <p>WHERE $m = 2A_s / h t$, A_s = AREA OF ONE SPAR</p>	
<p><u>THIN-WALLED T-SECTION</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)(1+4m)^2}{(12+96m+276m^2+192m^3) + \nu(11+88m+246m^2+216m^3) + 30n^2(m+m^2) + 10\nu n^2(4m+5m^2+m^3)}$ <p>WHERE $m = b t_l / h t$, $n = b/h$</p>	

Fig. 8

presentados por COWPER para diferentes formas de secciones transversales. Dichos resultados pueden utilizarse en el modelado que se cita.

El mismo sistema es aplicado para la construcción del modelo de los edificios auxiliares. Una planta típica es la de la Fig. 9. (LEE et al.)

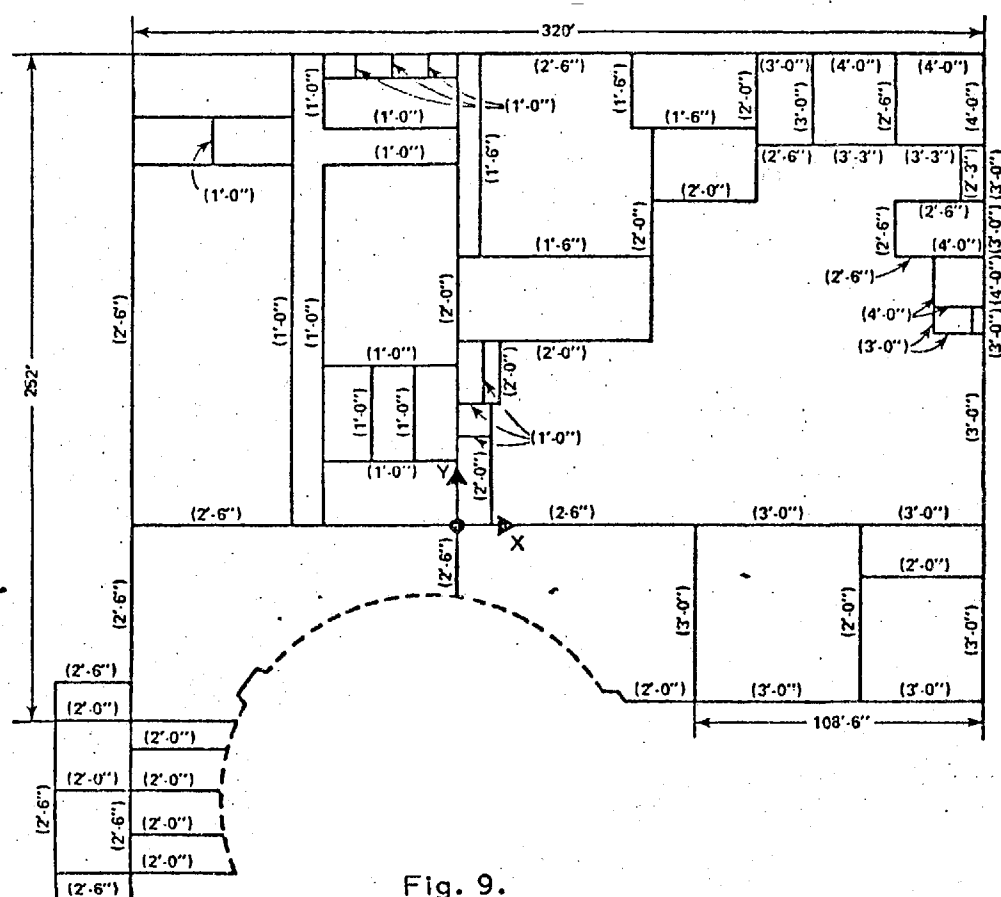


Fig. 9.

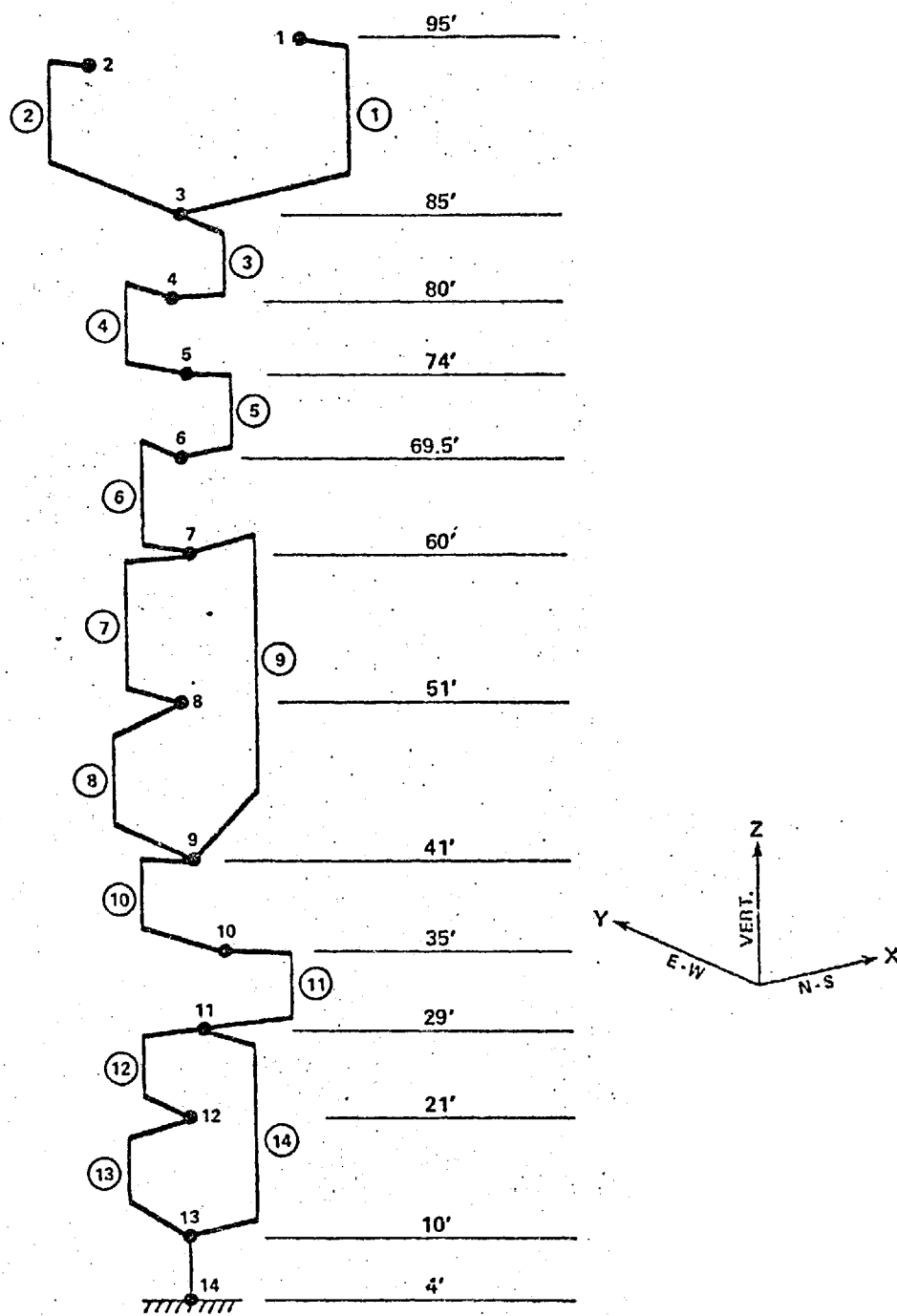
Como se observa la complejidad es enorme y ello justifica la simplificación.

Para el modelo se necesita indicar el valor de k pero también el centro de cortantes al que deben considerarse aplicadas las cargas. Puesto - que dichos centros no coinciden, en general, el correspondiente modelo es un voladizo quebrado en el que aparecen efectos tridimensionales debido a la falta de centrado de las diferentes plantas.

La Fig. 10 recoge un ejemplo del aspecto final del modelo.

Si lo que se pretende es el análisis sísmico, tras obtener los cortantes en cada planta es preciso repartirlos en las diferentes secciones resistentes de la planta.

Un método adecuado es el recurso a la teoría de las barras de sección delgada y abierta, que presenta una forma congruente de calcular -



LUMPED MASS MODEL

Fig. 10.

todas las necesidades.

Como es sabido el centro de cortante se obtiene a partir de la condición de momentos nulos del área sectorial

$$\omega_c = \int_0^s r \, ds$$

$$\int y \, \omega_c \, da = 0 = \int x \, \omega_c \, da \quad (44)$$

Puesto que la relación entre el área sectorial ω_c obtenida con polo en el centro de cortantes y la ω_g situada en el c.d.g. es

$$\omega_c = \omega_g - y_c (x - x_0) + x_c (y - y_0) \quad (45)$$

[siendo (x_c, y_c) las coordenadas de aquél respecto a un sistema en c.d.g. y x_0, y_0 los puntos de arranque de cuentas], se tiene

$$\int x \, \omega_c \, da = \int x \, \omega_g \, da - y_c \int x^2 \, da + x_c \int x y \, da = 0 \quad (46)$$

pues $\int x \, da = 0$

Análogamente

$$\int y \, \omega_g \, da - y_c \int x y \, da + x_c \int y^2 \, da = 0 \quad (47)$$

Luego

$$x_c = \frac{-R_x I_y + R_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (48)$$

$$y_c = \frac{R_y I_x - R_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

Siendo

$$I_x = \int y^2 da, \quad I_y = \int x^2 da; \quad I_{xy} = \int xy da$$

$$R_x = \int y w_g da \quad R_y = \int x w_g da$$
(49)

Las tensiones se obtienen (BATANERO 1956) estableciendo la relación entre el flujo de tensiones en la sección transversal y los momentos actuantes,

$$\frac{\partial (\tau t)}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

y

(50)

$$\tau_x t = \frac{-V_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_x \int_0^s x t ds - I_{xy} \int_0^s y t ds \right]$$

$$\tau_y t = \frac{-V_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_y \int_0^s y t ds - I_{xy} \int_0^s x t ds \right]$$
(51)

LEE et al (1975) aconsejan añadir sendos sumandos

$$\sum_{i=1}^m C_{xi} V_x$$

$$\sum_{i=1}^m C_{yi} V_y$$
(52)

a las expresiones anteriores con objeto de recoger la existencia de bucles cerrado. m es el número de bucles a que un elemento pertenece y las C constantes que deben ajustarse mediante la condición de que el giro de cada sección sea nulo (puesto que la carga actúa en el centro de cortantes).

Finalmente el cálculo de la constante de TIMOSHENKO se consigue mediante la aplicación del teorema de los trabajos virtuales.

Entre el sistema real (V, τ, δ) y otro ficticio (V^*, γ^*)

$$V^* \delta = \tau \gamma^* da$$
(53)

siendo δ el movimiento relativo entre secciones por unidad de altura. Por su lado

$$\gamma^* = \frac{\tau^*}{G}$$
(54)

donde τ^* se obtiene de (51) poniendo $V=1$. Si se suponen n barras de sección constante

$$\delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{V_x}{G t_j} \int_0^{s_j} \left[\frac{1}{I_x I_y - I_{xy}} \left(-I_x \int_0^{s_j} x t_j ds + I_{xy} \int_0^{s_j} y t_j ds \right) + \sum_{i=1}^m C_{xi} \right] ds \quad (55)$$

y análogamente para δ_y .

Identificando (55) con (6) se obtiene

$$\frac{1}{k A_x} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{t_j} \int_0^{s_j} \left[\frac{1}{I_x I_y - I_{xy}} \left(-I_x \int_0^{s_j} x t_j ds + I_{xy} \int_0^{s_j} y t_j ds \right) + \sum_{i=1}^{m_i} C_{xi} \right] ds \quad (56)$$

y análogamente para la otra dirección.

En la Fig. 11 se presentan los resultados para el ejemplo anterior cuando se aplica una fuerza de 100 kg.

Otra alternativa usual es la descrita por BLUME et al (1961) en la que se repite todo el razonamiento anterior usando el centro de rigidez en lugar del de cortantes y el reparto se hace proporcionalmente a las rigideces de cada pieza considerada como biempotrada.

La Fig. 12. recoge los resultados de una comparación con ambos procedimientos

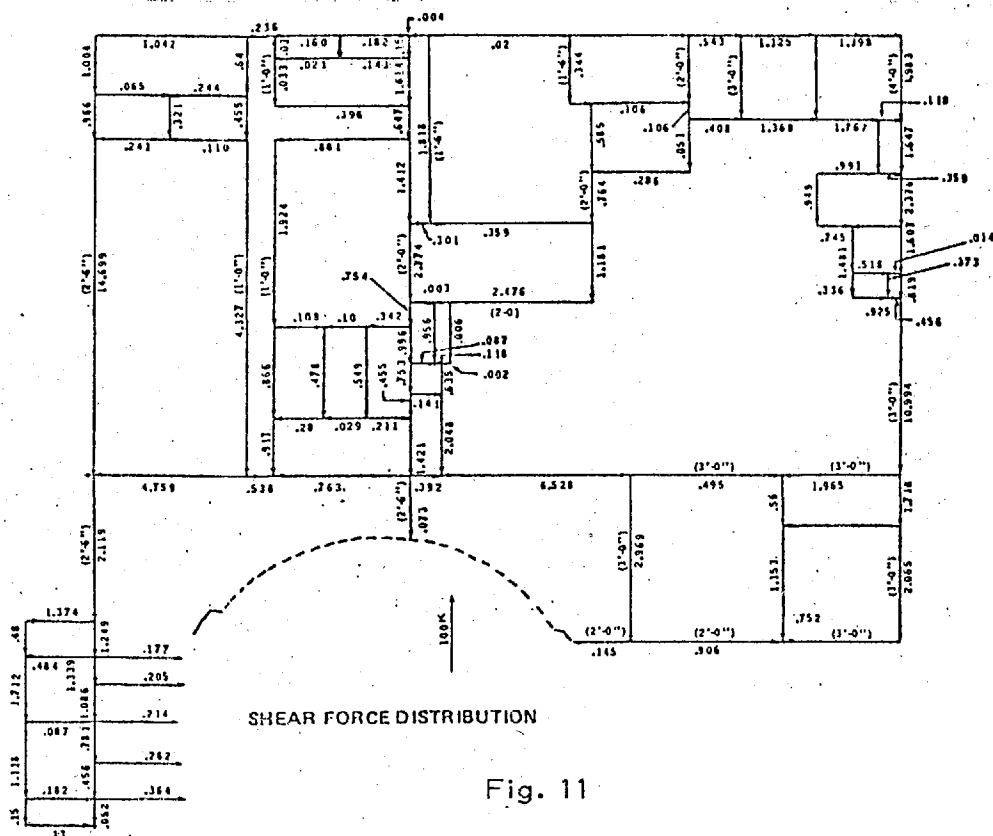


Fig. 11

Obsérvese que, hasta el momento, solo hemos dado indicaciones sobre la forma de modelar las características de rigidez de la estructura. La masa se discretiza según se indicó en el primer apartado y las fuerzas

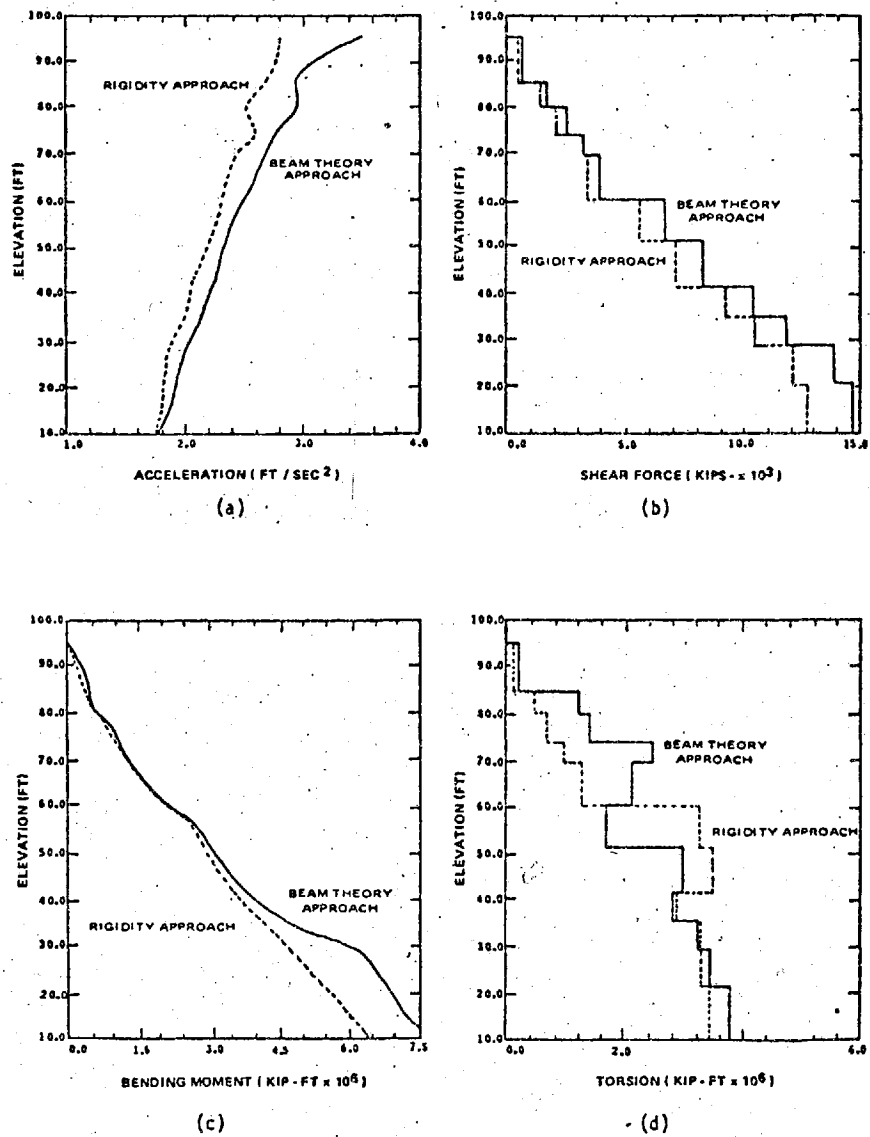


Fig. 12.

de amortiguamiento necesitan de una consideración especial, según se dirá en capítulos posteriores.

1.4.--Estructuras reticuladas

En edificios formados por barras existe la posibilidad de una aplicación sistemática de una filosofía integrada de discretización como veremos - en el apartado 3. Sin embargo, la teoría de masas concentrada permite aprovechar los conocimientos adquiridos en el análisis por métodos matriciales (MARTIN 1966; MEEK 1971) para el establecimiento de la matriz de rigidez de la estructura y simplificar el modelo si la masa puede, razonablemente considerarse aplicada en una serie de puntos.

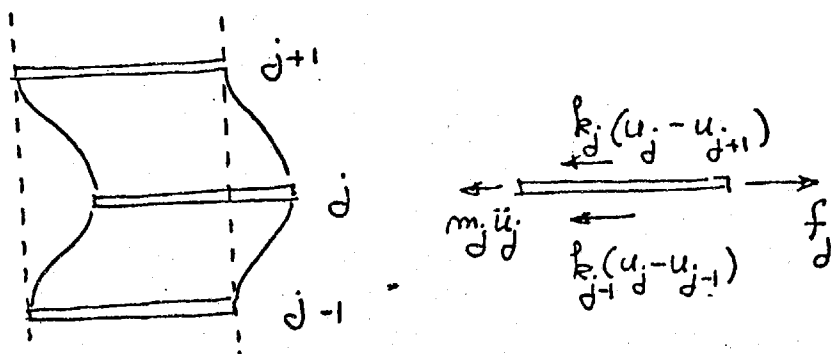


Fig. 13.

El ejemplo tradicional lo ofrece el edificio de forjados rígidos en su plano, apoyados en soportes ligeros en los que se suponen concentradas - las propiedades elásticas.

Si su masa se admite despreciable, o se concentra en los niveles de piso, estamos ante el "pórtico a cortante" (ROGERS 1959), Fig el equilibrio de uno de cuyos pisos puede escribirse

$$m_j \ddot{u}_j + u_j (k_j + k_{j-1}) - u_{j+1} k_j - u_{j-1} k_{j-1} = f_j \quad (57)$$

al que se pueden añadir términos de amortiguamiento similares a los de rigidez.

El resultado es el sistema

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{f} \quad (58)$$

donde \underline{m} es diagonal y \underline{k} presenta el característico aspecto tridiagonal.

$$\begin{bmatrix} k_0+k_1 & -k_1 & 0 & \dots\dots\dots \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \dots\dots\dots \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \dots\dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -k_{n-1} & k_{n-1} & +k_n \end{bmatrix}$$

(59)

Los coeficientes de rigidez tienen la forma.

$$k_i = \frac{1}{\delta_i} \quad ; \quad \delta_i = \frac{h_i^3}{12 E_i I_i} + \frac{h_i}{G_i A_{si}} \quad (60)$$

siendo:

δ_i : flecha provocada en el elemento por la actuación de una - carga unidad.

h_i : altura del piso i

E_i : modulo de elasticidad

G_i : módulo de rigidez

A_{Si} : área efectiva a cortante

I_i : momento de inercia de la sección transversal.

Si el amortiguamiento se considera debido exclusivamente a la deformación relativa entre pisos, al primer miembro de (59) debe añadirsele el

$$\underline{c} \quad \underline{\dot{u}}$$

(61)

donde \underline{c} es una matriz tridiagonal semejante a (59).

En casos mas complicados la matriz de rigidez \underline{k} se obtiene mediante el método directo de la rigidez por superposición de las correspondientes a las barras del entramado procediéndose acto seguido a un proceso de condensación del tipo siguiente:

La ecuación del movimiento (58) se particiona marcando la diferencia entre los grados de libertad con

$$\begin{bmatrix} \underline{m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_x & \underline{k}_{xy} \\ \underline{k}_{yx} & \underline{k}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_x \\ \underline{f}_y \end{bmatrix} \quad (62)$$

De la última se obtiene

$$\underline{y} = \underline{k}_y^{-1} (\underline{f}_y - \underline{k}_{yx} \underline{x}) \quad (63)$$

y con ello la primera se puede escribir

$$\underline{m} \ddot{\underline{x}} + (\underline{k}_x - \underline{k}_{xy} \underline{k}_y^{-1} \underline{k}_{yx}) \underline{x} = \underline{f}_x - \underline{k}_{xy} \underline{k}_y^{-1} \underline{f}_y \quad (64)$$

que representa la ecuación del movimiento en los grados de libertad inherentes. El proceso de condensación no requiere realmente el uso de la \underline{k}_y^{-1} , sino que (63) es una expresión simbólica y la operación se lleva a cabo mediante un proceso de eliminación de Gauss. (BATHE Y WILSON 1976). Algunos autores recomiendan (HATTER 1973) la inversión de la matriz de flexibilidad cuando el número de grados de libertad es muy pequeño, y el cálculo de las columnas de esta última mediante cualquier programa de ordenador (aplicando cargas de unidad sucesivamente y calculando las flechas en los puntos de interés).

2.--MODELOS CONTINUOS

Como es bien sabido el utillaje matemática requerido para el modelado del continuo son las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o las ecuaciones integrales. Cualquiera de las dos representaciones presenta características de dificultad insuperables cuando el problema no es simple y por ello se ha impuesto su tratamiento por métodos numéricos.

Conviene sin embargo, recordar algunas soluciones analíticas que son de uso corriente en los problemas sísmicos, y que permiten, en cualquier caso, aventurar comportamientos cualitativos en los casos complejos.

2.1.--La influencia de la inercia de rotación y de la deformación tangencial.

En el apartado 1.1. se estudió la influencia que la deformación tangencial tiene sobre la ecuación de campo de una pieza recta. Utilizando la misma notación y criterio de signos, puede verse que el movimiento

$$u = -\psi(x) \cdot y \quad (2)$$

implica una aceleración y por tanto una fuerza de inercia

$$\frac{m}{A} \ddot{\psi}(x) y \, da \quad (65)$$

donde m es la masa por unidad de longitud y da el elemento de área de la sección transversal situado a la altura y .

A su vez (65) produce un momento negativo

$$-\frac{m}{A} \ddot{\psi}(x) \int_A y^2 \, da = -\frac{mI}{A} \ddot{\psi}(x) \quad (66)$$

de modo que las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -p \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= -V + \frac{mI}{A} \ddot{\psi}(x, t) \end{aligned} \quad (67)$$

Puesto que, según (8)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} - \frac{p}{kGA} \quad (8)$$

derivando dos veces

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} \frac{\partial}{\partial x} \left(-V + \frac{m \cdot l}{A} \ddot{\psi} \right) - \frac{p''}{kGA}$$

Además de (1) y (6)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial V / \partial x}{kGA}$$

es decir

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} \left[p + \frac{ml}{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{p}{kGA} \right) \right] - \frac{p''}{kGA}$$

con lo que la ecuación de campo se puede escribir finalmente de forma

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{p}{EI} + \frac{m}{EA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m}{EA} \frac{p}{kGA} - \frac{p''}{kGA} \quad (68)$$

En el caso particular de vibraciones libres

$$p = -m \ddot{v} \quad (69)$$

y así

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{m}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{m}{EA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{m^2}{EA kG} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{m}{kGA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}$$

o bien

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{m}{EA} + \frac{m}{kGA} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m^2}{kGEA} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad (70)$$

Un interesante gráfico que refleja la importancia relativa de los diferentes términos que aparecen en la ecuación (70) queda recogido en la Fig. 14 (ROGERS)

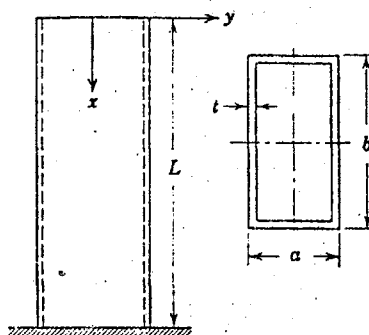


Fig. 6.1.

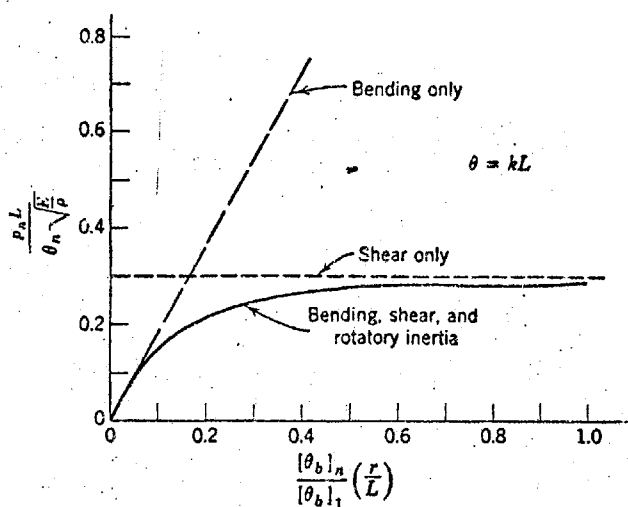


Fig.14

En abscisas se representa la inversa de la esbeltez de un voladizo (r es el radio de giro) y en ordenadas la frecuencia propia de vibración k es el coeficiente α

$$\alpha^2 = \frac{m p^2}{k A G} \quad (71)$$

y n toma los valores $1, 2, \dots$ etc.

Un caso particular muy interesante de (70) lo constituye aquél en que se suponen despreciables los efectos de flexión e inercia de giro. En este

caso (70) se convierte en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{m}{k A G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (72)$$

como se obtiene derivando (1) tras olvidar la contribución de ψ .

Buscando soluciones

$$v = v^* e^{ipt} \\ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = - \frac{m}{k A G} p^2 v^* = - \alpha^2 v^* \quad (73)$$

donde α viene definida por (71)

La solución general es evidentemente

$$v^* = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \quad (74)$$

y c_1, c_2 se ajustan de acuerdo con las condiciones de contorno.

En una viga en voladizo

$$\begin{aligned} v^*(0) = 0 & \longrightarrow c_1 = 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial x}(L) = 0 & \longrightarrow 0 = c_2 \alpha \cos \alpha L \end{aligned} \quad (75)$$

De la segunda

$$\begin{aligned} \alpha L &= (2n-1) \frac{\pi}{2} & n=1,2,\dots \\ \alpha^2 &= \frac{m p^2}{k A G} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4 L^2} \end{aligned} \quad (76)$$

y en consecuencia las frecuencias posibles de vibración son:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{k A G}{m} (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4 L^2} \\ p &= (2n-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{k A G}{m}} \end{aligned} \quad (77)$$

Dos notas importantes deben añadirse a lo indicado. En primer lugar - bastaría hacer

$$c_s^2 \rightarrow \frac{kAG}{m} \quad (78)$$

(obsérvese que el paralelismo es congruente pues $c_s^2 = \frac{G}{\rho}$ y por tanto $m/k \leftrightarrow \rho$) para que (72) tuviese la forma de la ecuación de propagación de las ondas S en vertical, con lo que (77) sería

$$p_s = (2n-1) \frac{\pi}{2L} c_s \quad (79)$$

y las ecuaciones planteadas servirían para analizar el movimiento de estratos de potencia L, así como para interpretar en otra forma el movimiento de la viga a cortante.

Por otro lado una discretización de (73) con diferencias finitas nos debe conducir a las ecuaciones del pórtico a cortante.

En efecto, si hacemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v^*}{\partial x} \right|_i &= \frac{v_{i+1}^* - v_i^*}{\Delta} \\ \left. \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right|_i &= \frac{v_{i+1}^* - 2v_i^* + v_{i-1}^*}{\Delta^2} \end{aligned} \quad (80)$$

(73) se puede escribir como

$$v_{i+1}^* - 2v_i^* + v_{i-1}^* = -\alpha \Delta^2 v_i^* \quad (81)$$

Pero si en (57) se hace $f_j = 0$; $u_j = v_j^* e^{ipt}$

$$-m_j p^2 v_j^* + v_j^* (k_j + k_{j-1}) - v_{j+1}^* k_j - v_{j-1}^* k_{j-1} = 0 \quad (82)$$

o bien

$$-m_j p^2 v_j^* + k_{j-1} (v_j^* - v_{j-1}^*) - k_j (v_{j+1}^* - v_j^*) = 0 \quad (83)$$

Una expresión semejante se obtiene al hacer p^2 manifiesto

$$-v_{i+1}^* + 2v_i^* - v_{i-1}^* = + \frac{m}{k AG} \Delta^2 p^2 v_i^*$$

$$\left[- (v_{i+1}^* - v_i^*) + (v_i^* - v_{i-1}^*) \right] \cdot \frac{k AG}{\Delta} = m \Delta p^2 v_i^* \quad (84)$$

Para que (83) y (84) sean iguales basta que

$$k_j = k_{j-1} = \frac{k AG}{\Delta} \quad (85)$$

Obsérvese que las dimensiones del segundo miembro de (85) son

$$\frac{\text{cm}^2 \text{ kg.}}{\text{cm}^2 \text{ cm}} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

como corresponde a la definición de rigidez elemental.

La completa semejanza de (83) y (84) justifica el nombre de "pórtico a cortante" acuñado en el apartado 1.4.

En ciertos problemas de interacción terreno-estructura el modelo continuo de la viga o el estrato a cortante es utilizado en forma habitual. La primera para representar estructuras poco esbeltas y la segunda para los procesos de deconvolución de registros, básicos en los métodos de análisis de un paso, según veremos.

3.--DISCRETIZACION CONSISTENTE DE MODELOS CONTINUOS.

En apartados anteriores vimos la posibilidad de manejar modelos en los que los grados de libertad se redujeron a un número finito. El tratamiento independiente de las características elásticas e inerciales provocaba inconsistencias en cuanto a dicho número, inconsistencias que se eliminaban mediante lo que allí se denominaba proceso de condensación.

En este apartado nos vamos a referir a métodos que tratan con una sola filosofía de discretización todas las características de la estructura.

Fundamentalmente distinguiremos dos grupos: los que discretizan el dominio y los que discretizan el contorno. Entre los primeros nos limitaremos a una somera exposición de los de RAYLEIGH-RITZ y elementos finitos, mientras que en los segundos hablaremos de las posibilidades del método de los elementos de contorno (B.I.E.M.) al tratar la respuesta en régimen permanente.

Se incluyen también algunos ejemplos comparativos.

3.1.--El método de RAYLEIGH-RITZ y la discretización de KANTOROVITCH.

El tratamiento de una ecuación diferencial

$$A u = f \quad (86)$$

donde A es un operador diferencial, u la variable de campo y f el resultado de aplicar el primero al segundo, puede plantearse en forma integral alternativa a su resolución directa. Para ello se elige una familia de funciones ψ_j y se establece la formulación débil de (86)

$$(A u, \psi_j) = (f, \psi_j) \quad (87)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

mediante la definición de un producto escalar $(.,.)$ en el espacio de las funciones de cuadrado integrable. Condiciones suficientes para que el primer miembro de (87) represente un producto escalar son, evidentemente, que A sea definido, simétrico y positivo, en cuyo caso

$$(u, \psi_j)_A = (A u, \psi_j) \quad (88)$$

se llama "producto escalar energético" (MIKHLIN 1963).

Si las ψ_j forman una base de SCHAUDER

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i \quad (89)$$

Pues bien, en el método de RAYLEIGH-RITZ se trunca (89) y se busca la solución de (87) de modo que

$$u \approx u_n = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \quad (90)$$

Se trata pues de aproximar la solución desde un subespacio finito, análogamente a lo que se consigue con el método de los mínimos cuadrados (De hecho ambos métodos coinciden si la distancia se mide según la norma correspondiente al producto escalar energético (PRENTER 1975)).

Sustituyendo (90) en (87) y teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar

$$\sum_{i=1}^n a_i (A \psi_i, \psi_j) = (f, \psi_j) \quad j=1,2, \dots, n \quad (91)$$

sistema de ecuaciones que permiten calcular los coeficientes a_i y por tanto la aproximación u_n deseada. Obsérvese que la convergencia lógicamente aumenta con la dimensión del espacio escogido y que salvo casos especiales la matriz

$$k_{ij} = (A \psi_i, \psi_j) = (\psi_i, \psi_j)_A \quad (92)$$

será no diagonal.

Si se pretende una matriz diagonal debe ser

$$(A \psi_i, \psi_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (93)$$

es decir

$$A \psi_i = a_i \psi_i \quad (94)$$

ya que según (93) debe ser ortogonal a todo los ψ_j . (94) es la definición de autovalores del operador A y por tanto K_{ij} solo será diagonal si la

familia ψ_j está formada por autofunciones del operador A.

Finalmente es obvia la propiedad simétrica de K_{ij} en función de las características exigidas a A.

Un ejemplo instructivo lo ofrece el tratamiento de la viga a flexión

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2}{dx^2} EI \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \\ u &= v \\ f &= p \end{aligned} \quad (95)$$

donde se han seguido las notaciones del apartado (1.1.)

Si se trata de una viga simplemente apoyada de luz L y características $EI = \text{cte}$, la familia

$$\psi_j = \sin \frac{j \pi x}{L} \quad j=1, 2, \dots \quad (96)$$

cumple evidentemente las condiciones de contorno y, además,

$$A \psi_j = EI \left(\frac{j \pi}{L} \right)^4 \psi_j \quad (97)$$

es decir son autofunciones y $E \pi \left(\frac{j \pi}{L} \right)^4$ autovalores del operador en estudio. En consecuencia

$$\begin{aligned} k_{ij} &= (A \psi_j, \psi_i) = EI \left(\frac{j \pi}{L} \right)^4 (\psi_j, \psi_i) = \\ &= EI \left(\frac{j \pi}{L} \right)^4 \int_0^L \sin \frac{j \pi x}{L} \sin \frac{i \pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ EI \left(\frac{j \pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (98)$$

En el caso dinámico

$$p = q - c \dot{v} - m \ddot{v} \quad (99)$$

donde q es la carga realmente actuante
c el amortiguamiento por unidad de longitud.
m la masa por unidad de longitud.

de modo que el producto (f, ψ_j) es realmente

$$(f, \psi_j) = (q, \psi_j) - (c \dot{v}, \psi_j) - (m \ddot{v}, \psi_j) \quad (100)$$

Puesto que según (90) las ψ_i solo dependen del punto en estudio, la derivación respecto al tiempo solo puede afectar a las a_i . Estas quedan todavía indeterminadas (método de KANTOROVITCH) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En efecto, sustituyendo (90)

$$(f, \psi_j) = (q, \psi_j) - \dot{a}_i (c \psi_i, \psi_j) - \ddot{a}_i (m \psi_i, \psi_j)$$

Definiendo

$$c_{ij} = (c \psi_i, \psi_j) = \int_0^L \sin \frac{i \pi x}{L} c \sin \frac{j \pi x}{L} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ c \frac{L}{2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$m_{ij} = (m \psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ m \frac{L}{2} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (101)$$

y reordenando, la (91) se escribe

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \ddot{a}_i + \sum_{i=1}^n c_{ij} \dot{a}_i + \sum_{i=1}^n k_{ij} a_i = (q, \psi_j) \quad (102)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

m_{ij} es pues la matriz de masa, c_{ij} la matriz de amortiguamiento y k_{ij} la matriz de rigidez del sistema, mientras que (q, ψ_j) es el vector de cargas.

En forma consistente y con la única aproximación (90) se han reducido los ∞ g.d.l. del sistema a n . En una palabra se ha establecido un proceso consistente de discretización.

En nuestro ejemplo la elección (96) ha producido además matrices diagonales (si m y c son constantes!) por lo que la frecuencia propia de vibración se obtiene de cada ecuación como cociente

$$w_i^2 = \frac{k_{ii}}{m_{ii}} = EI \left(\frac{j\pi}{L} \right)^4 \frac{L/2}{L/2} \quad (103)$$

que, como era de esperar, son justamente los autovalores del operador.

3.2.--El método de los Elementos finitos (F.E.M.)

En el caso de un operador complicado puede no conocerse el conjunto de autofunciones del operador y ello conducirá a unas matrices llenas de tratamiento difícil.

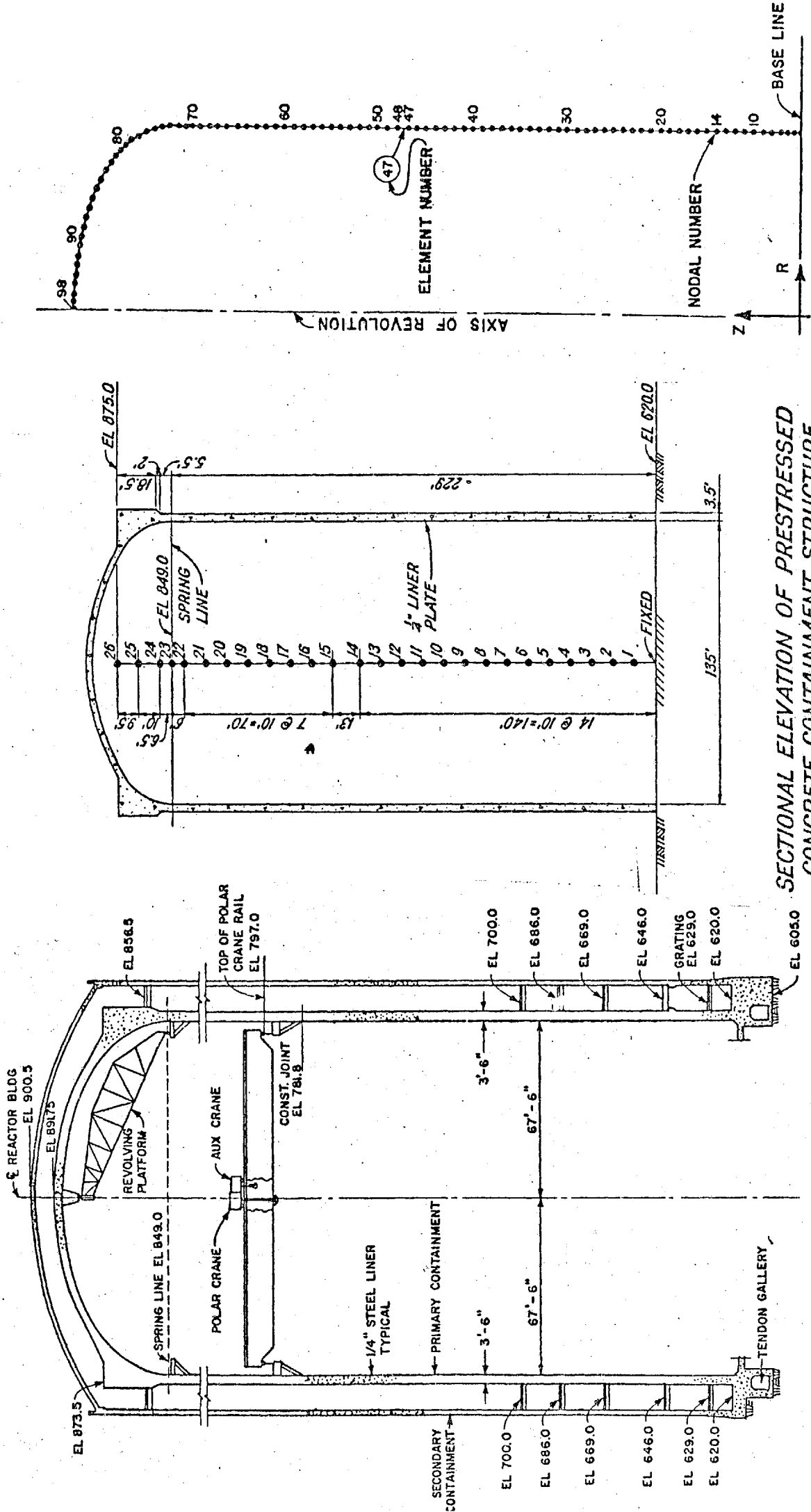
Una elección interesante consiste en tomar la familia ψ_j como formada por funciones definidas localmente, esto es, funciones de pequeño soporte, con lo que muchos productos $(A \psi_i, \psi_j)$ serán nulos y las matrices resultantes en banda con todas las ventajas que ello implica de cara a su tratamiento en ordenador.

Realmente con ello no se hace mas que parodiar la formulación matemática "débil" de las ecuaciones diferenciales sustituyendo las funciones terminales por otras acordes con el grado de derivación exigido por el operador.

En el caso de la viga dichas funciones serían los polinomios cúbicos de Hermite y, en general, si el operador es de grado $2n$, las funciones de ponderación serían splines de rugosidad $(2n-1)$ con pequeño soporte.

Esta formulación conduce de modo inmediato a la matriz de rigidez de barra típica del cálculo matricial de estructuras y a las matrices consistentes de masa y rigidez usadas habitualmente (CLOUGH 1975).

Una comparación, de interés en centrales nucleares, entre los resultados obtenidos con el F.E.M. y con un modelo de masas concentradas fijado de acuerdo con los criterios del apartado 1 puede verse en FENG et al (1975). La estructura estudiada, así como sus modelos de masas concentradas y elementos finitos se presentan en la Fig. 15. En la tabla siguiente se comparan los valores obtenidos para los modos de vibración de ambos modelos, pudiéndose observar que los valores correspondientes al primer modo son prácticamente coincidentes.



SECTIONAL ELEVATION OF PRESTRESSED
CONCRETE CONTAINMENT STRUCTURE
LUMPED MASS MODEL FOR DYNAMIC ANALYSIS

Fig. 15

FINITE ELEMENT MATHEMATICAL MODEL

Tabla 1

<u>COMPARISON OF MODE (PERIOD, SEC)</u>				
Mode No.	Horizontal		Vertical	
	Beam Model	Shell Model	Beam Model	Shell Model
1	0.3697*	0.3811*	0.1061	0.1106
2	0.1398	0.1109*	0.0329	0.0573
3	0.0906*	0.0589		
4	0.0458	0.0565		
5	0.0449	0.0504		
6	0.0300	0.0461		

*Modes involving the primary deformation.

Ello es del mayor interés pues como se ve en la Tabla 2 los factores de participación de aquél en el modelo de viga predominantes y algo semejante sucede en el de F.E. En la Fig. 16 se recogen los 4 primeros modos de vibración de este segundo modelo, mientras que en la Fig. 17 se incluye una comparación de los movimientos verticales y horizontales obtenidos tras la aplicación de la regla SRSS (Square root of sum of squares).

Es interesante la coincidencia de ambos modelos que justifica la práctica habitual de modelado con masas equivalente. Asimismo conviene hacer notar que en el estudio del voladizo se concentró toda la masa de la cúpula en el nivel 875 y por ello la comparación de resultados solo se realiza hasta dicho nivel.

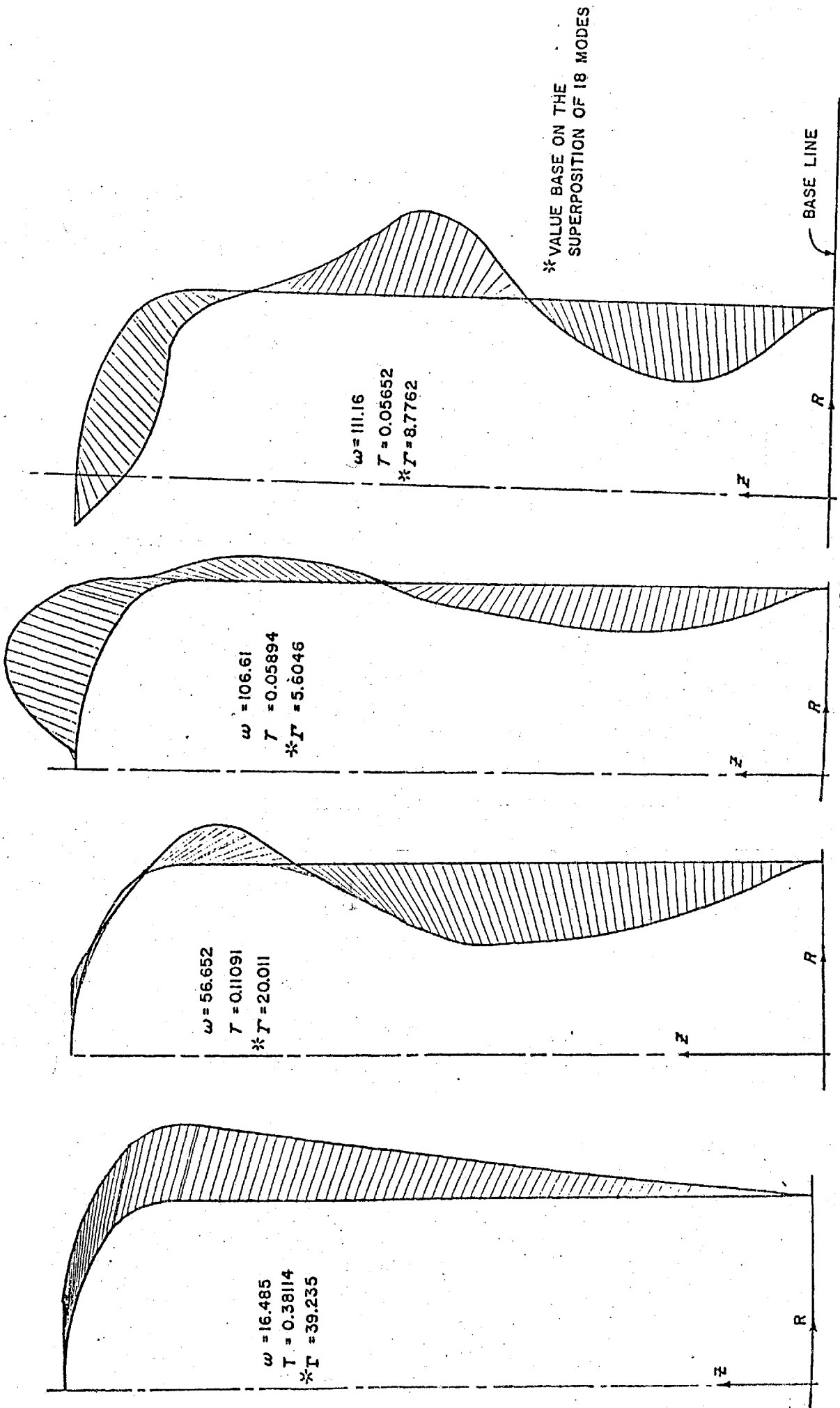


Fig. 16

NORMAL MODES OF VIBRATION OF BEAM MODEL

Mode No.	<u>Horizontal Motion</u>		<u>Vertical Motion</u>	
	Period Sec	Participation Factor N-S Motion & E-W Motion	Period Sec	Participation Factor
1	0.3697	1.2704	0.10611	1.2091
2	0.13983	0.00015	0.03287	0.47617
3	0.0906	0.65954		
4	0.0458	-0.0706		
5	0.0448	0.27124		
6	0.0300	-0.22985		

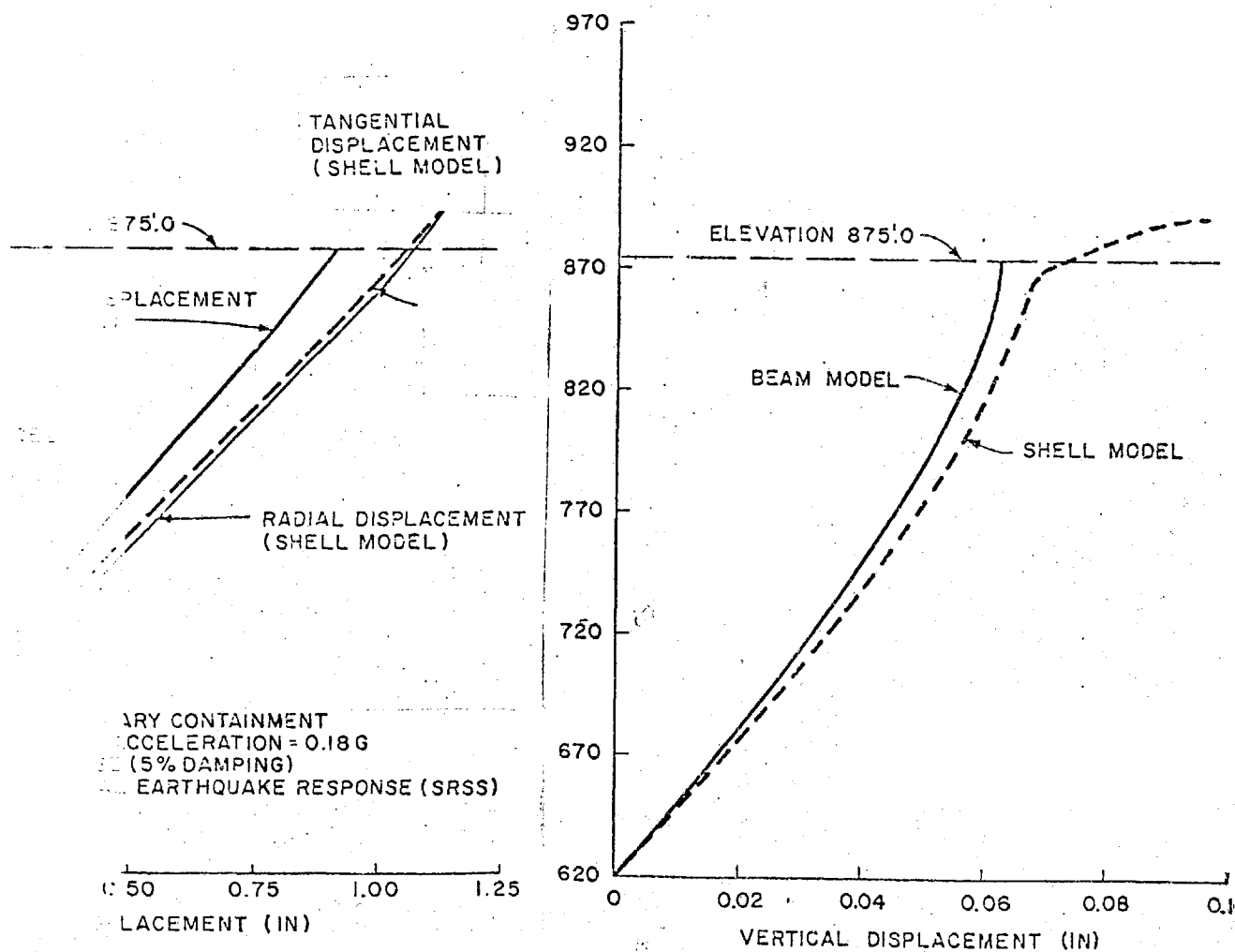


Fig. 17

3.3.--El método de los elementos de contorno (B.I.E.M.)

Con los métodos de dominio es preciso discretizar todo el campo de definición de la estructura, lo que en el caso de problema tridimensionales conduce a costos o tiempos de cálculo que pueden llegar a ser desproporcionados aun con la potencia de los ordenadores actuales.

El B.I.E.M. recoge las ideas de discretización del F.E.M. combinándolas con resultados clásicos analíticos bien conocidos.

Con las condiciones precisas para (86) es bien sabido que

$$(Au, \psi_j) = a(u, \psi_j)_D + b(u, \psi_j)_{\partial D} \quad (104)$$

donde a es una forma bilineal simétrica definida en el dominio D y la otra definida en el contorno.

Para aprovechar la simetría de a es conveniente plantear el problema simétrico a (86), (87)

$$\begin{aligned} A \psi_j &= f^* \\ (A \psi_j, u)_D &= (f^*, u)_D \end{aligned} \quad (105)$$

y desarrollar

$$(A \psi_j, u)_D = a(\psi_j, u)_D + b(\psi_j, u)_{\partial D} \quad (106)$$

Restando (104) y (106) se obtiene

$$b(u, \psi_j)_{\partial D} - b(\psi_j, u)_{\partial D} = (f, \psi_j)_D - (f^*, u)_D \quad (107)$$

La ecuación (107) es la fórmula de Green en teoría del potencial o el teorema de reciprocidad en elasticidad. El paso a la fórmula Somigliana (o a la conocida expresión del potencial en un punto como suma de uno de capa simple, otro de capa doble y otro volumétrico) se consiguen sin más que hacer

$$f_j^* = \delta_j(P) \quad (108)$$

es decir obligando a que ψ_j sea la solución fundamental de A cuando se aplica una carga unidad en el punto P (Solución de KELVIN en elasticidad o potencial de COULOMB en electrostática).

Con ello (107) pasa a ser

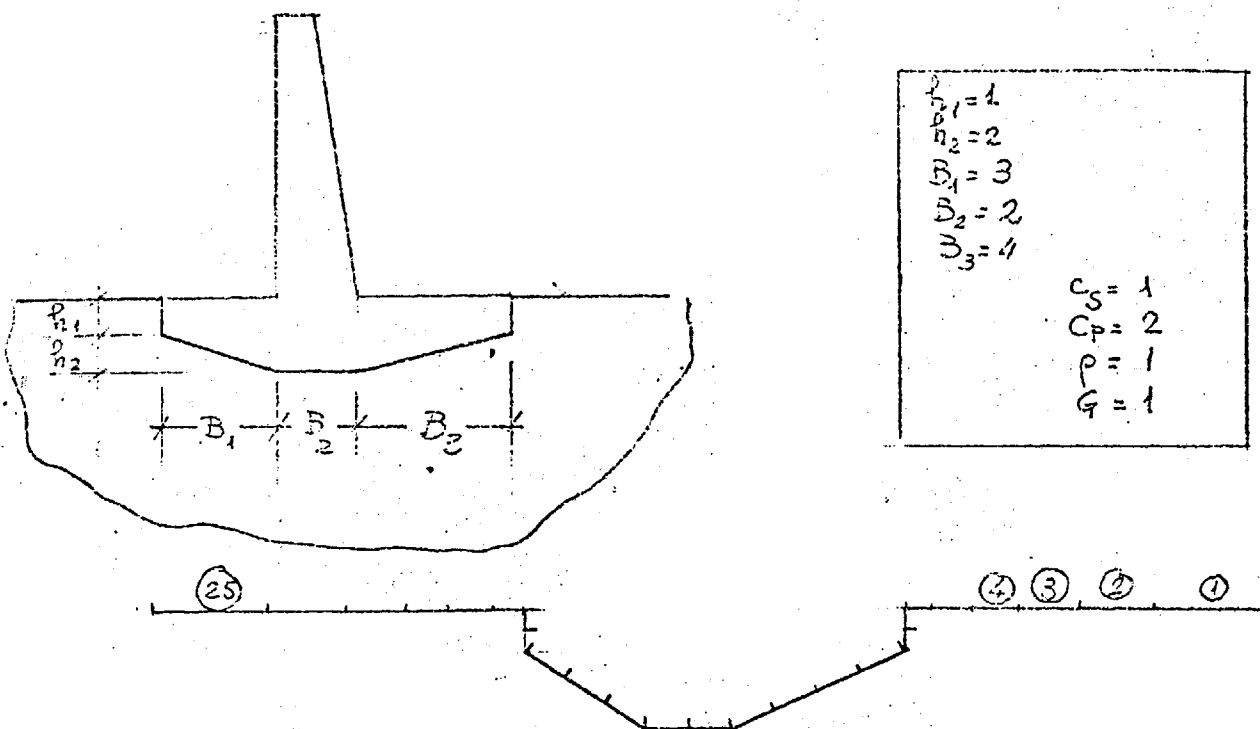
$$u_j(p) = (f, \psi_j)_D - b(u, \psi_j)_{\partial D} + b(\psi_j, u)_{\partial D} \quad (109)$$

El paso de P al contorno y la aproximación de las variables esenciales y naturales del problema como superposición de funciones definidas localmente permite establecer un sistema de ecuaciones cuya resolución se realiza sólo en el contorno (ALARCON et al 1978). Por oposición al F.E.M. las matrices a tratar son llenas y asimétricas (lo que se ve claramente en 100) lo que, sin embargo, no es óbice para que el método resulte competitivo en los casos tridimensionales.

En régimen permanente es muy fácil obtener resultados para medio infinito (ALARCON et al 1978) y vg. en la Fig. 18. se representan los valores de las impedancias equivalentes de un cimiento en faja de forma arbitraria.

Más resultados puede encontrarse en el apartado relativo a la modelación del semiespacio del capítulo de interacción terreno-estructura.

IRREGULAR EMBEDDED FOUNDATION



BOUNDARY DISCRETIZATION (25 ELEMENTS)

Irregular foundation

α_0	k_x	k_y	k_ψ / coup
0.6	$1.988 + 2.5131 i$	$1.7855 + 2.805 i$	$3.026 + 0.92 i$
	$-0.43 - 1.006 i$	$0.017 + 0.20 i$	$-0.23 - 0.827 i$
1.2	$2.2592 + i 4.365$	$1.8659 + 5.183 i$	$2.96 + 2.1816 i$
	$-0.5282 - 1.26 i$	$0.02905 + 0.036 i$	$-0.572 - 1.624 i$

Rectangular foundation

$E/B = 0.5$

0.6	$2.0189 + 2.617 i$	$1.71074 + 2.9597 i$	$2.187 + 3.61 i$
	$-0.137 - 0.6845 i$	$-0.8 \cdot 10^{-7} - 0.31 \cdot 10^{-7} i$	$-0.39 - 0.7 i$
1.2	$2.215 + 4.568 i$	$1.5887 + 5.67 i$	$3.1354 + 2.397 i$
	$-0.369 - 0.5977 i$	$-0.1 \cdot 10^{-6} - 0.48 \cdot 10^{-7} i$	$-0.33 - 1.00 i$

Fig. 18.

REFERENCIAS

- Arya, O'Neill, Pincus.,
1979 Design of structures and foundations for vibrating Machines. Gulf.Pub. Comp.
- Cowper,
1966 The shear coefficient in Timoshenko's beam theory.
Journal of applied mechanics. June.
- Love,
1944 A treatise on the mathematical theory of elasticity.
Dover.
- Lee, Chokshi, Chan.,
1975 Shear coefficient and distribution of shear forces due to earthquake load. 2nd. ASCE spe. conf. on struc. Desi. of Nucl. Plant facilities.
- Batanero,
1956 Apuntes de Estructuras Metálicas. Escuela Especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- Blume, Newmark, Corning.,
1961 Design of multistory reinforced concrete buildings for earthquake motions. PCA
- Martín,
1966 Introduction to matrix methods for structural analysis.
Mc-Graw-Hill
- Meek,
1971 Matrix structural analysis.
Mac-Graw-Hill
- Rogers ,
1959 Dynamics of framed structures.
J. Wiley
- Bathe, Wilson.,
1976 Numerical methods in finite element analysis.
Prentice

- Mikhlin.,
1963 Variational methods in mathematical physics.
Pergamon
- Prenter,
1975 Splines and variational methods.
J. Wiley
- Clough & Penzien.,
1975 Dynamics of structures.
Mc-Graw-Hill
- Feng, Enis, Hunt.,
1975 Seismic analysis of a post-tensioned concrete containment.
2nd. ASCE specialty conference on Struc. Des. of Nuc.
Plant Facil.
- Alarcón, Martín, Paris.,
1978 Boundary elements in potential and elasticity theory.
Computers & Structures.
- Alarcón, Dominguez, Del Caño.,
1978 Boundary methods in soil-structure interaction
Proceed. 2nd Int. Conf. On Microzonation SSA
- Hatter.
1973 Matrix computer methods of vibration analysis. Butterworths